Komplexe Zahlen

Teilmengen der Gaußschen Ebene

Datei Nr. 50037

Friedrich Buckel

Stand 19. November 2023

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

1 Kreisringe, Sektoren, Winkelfelder

a) **Kreislinie und Kreisscheibe**

Die Gleichung $|z-m|=r$ stellt die Kreislinie eines Kreises um M mit Radius r dar.

Die Ungleichung $|z-m|<r$ stellt das Innere dieses Kreises dar (offene Kreisumgebung).

Und mit $|z-m|\le r$ erhält man Kreislinie und Kreisinneres (Kreisscheibe)

Schließlich ergibt $|z-m|>r$ das Äußere der Kreislinie / Gauß-Ebene ohne „gefüllten Kreis".

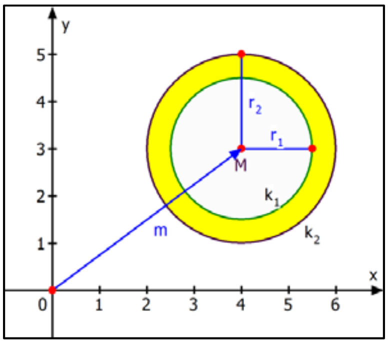
Auch diese Ungleichung beschreibt eine Kreisscheibe: $z\overline{z}+\mathrm{Re}(2z)-\mathrm{Im}(2\overline{z})\le 0$

b) **Ein Kreisring** wird von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt. Die Punkte im Inneren eines Kreisrings sind Lösungen der Doppelungleichung:

$$r_1<|z-m|<r_2$$

In diesem Falle gehören die Kreislinien als Rand des Kreisrings noch dazu:

$$r_1\le|z-m|\le r_2$$



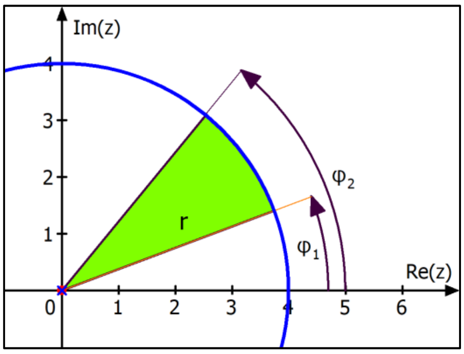
Der abgebildete (abgeschlossene) Kreisring wird beschrieben durch die Ungleichung:

$$1{,}5\le|z-(4+3i)|\le 2 \quad \text{bzw.} \quad 1{,}5\le|z-4-3i|\le 2$$

c) **Einen Sektor** beschreibt man am besten durch Polarkoordinaten, also Radius $r=\sqrt{x^2+y^2}$

und Argument (Winkel): $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$

Dann kann man einen Sektor durch zwei Bedingungen beschreiben: $|z|\le r$ und $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$



Der abgebildete Sektor wird z. B. so dargestellt:

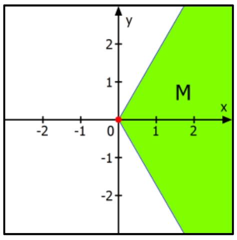
$$S=\{z\mid |z|\le 4 \text{ und } 20^\circ\le\varphi\le 50^\circ\}$$

Wegen der Gleichheitszeichen stehen, gehört der Rand zur Menge dazu.
S ist also abgeschlossen.

d) **Unbegrenzter Sektor (Winkelfeld)**: $M_1=\{z\mid |\mathrm{Arg}(z)|<\frac{\pi}{3}\}$

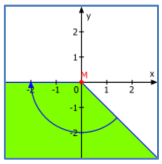
Hier bedeutet die Betragsungleichung $-\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -60^\circ<\varphi<60^\circ$.

Da für den Radius keine Bedingung angegeben ist, kann dieser beliebig groß sein.



Bei <u>Argument-Ungleichungen</u> *muss man einen Definitionsbereich für φ angeben:*

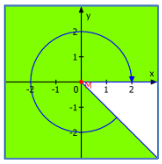
Was soll etwa $\varphi > \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi > 90^{O}$ bedeuten? Wenn man $\varphi \in \mathbb{R}$ zulässt, dann deckt das Winkelfeld <u>die ganze Ebene</u> ab, denn nach einer Umdrehung von 2π hat der Radius bereits die ganze Gauß-Ebene überstrichen. Dann ist die Ungleichung $\varphi > 90^{O}$ wirkungslos.



Beispiel 1 Wie weit soll das zu $\varphi \le -\frac{\pi}{4}$ gehörende Winkelfeld gehen?

Bis $-\pi$? Dann heißt die Bedingung $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{4}$ (obere Abb.)

Oder bis -2π? Also $-2\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{4}$ (untere Abb.)



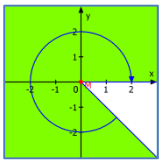
Das wird besonders dramatisch, wenn die Bedingung so lautet:

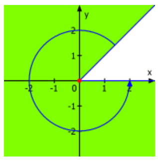
$|\varphi| > \frac{\pi}{4}$ was dasselbe ist wie "$\varphi \le -\frac{\pi}{4}$ oder $\varphi \ge \frac{\pi}{4}$"

Wenn der Definitionsbereich für φ z. B. so angesetzt worden ist: $-2\pi \le \varphi \le 2\pi$,

dann zeigt die linke Abb. die Lösungsmenge für $\varphi \le -\frac{\pi}{4}$ und die rechte die für $\varphi \ge \frac{\pi}{4}$.

Man achte auf den Umlaufsinn!





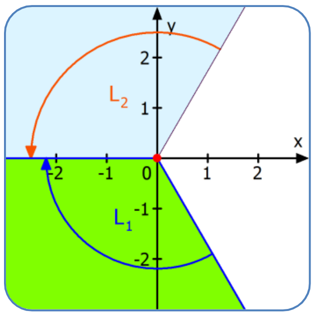
Die Lösungsmenge für $|\varphi| > \frac{\pi}{4}$ besteht dann aus der Vereinigung beider Mengen, und das ist dann die ganze Ebene $\mathbb{C}$,

Man sieht also, dass Aufgaben ohne nähere Angaben für den Definitionsbereich von φ sinnlos sind.

Beispiel 2: $M = \left\{ z \mid |\mathrm{Arg}(z)| > \frac{1}{3}\pi \right\}$ für $\varphi \in [-\pi ; \pi]$

$|\varphi| > \frac{1}{3}\pi \iff \varphi < -\frac{1}{3}\pi$ oder $\varphi > \frac{1}{3}\pi$ wird unter Beachtung von $\varphi \in [-\pi ; \pi]$ zu

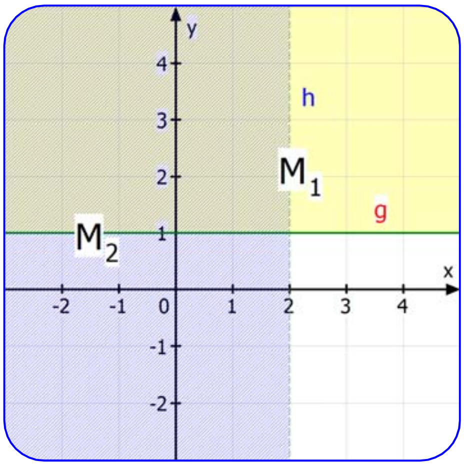
$$\underbrace{-\pi<\varphi<-\tfrac{1}{3}\pi}_{L_1} \text{ oder } \underbrace{\tfrac{1}{3}\pi<\varphi<\pi}_{L_2}$$



M ist die Vereinigungsmenge $M = L_1 \cup L_2$.

Diese könnte man auch beschreiben durch $\frac{1}{3}\pi < \varphi < \frac{5}{3}\pi$

2 Streifen und Rechtecke



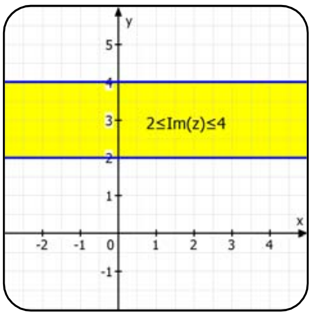
(1) Die Ungleichung $\operatorname{Im}(z) \geq 1$ beschreibt eine **Halbebene**, die von der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung y = 1 nach unten begrenzt wird.
Man kann die Punktmenge auch durch $y \geq 1$ beschreiben. Die Punkte auf dieser Geraden gehören dazu.

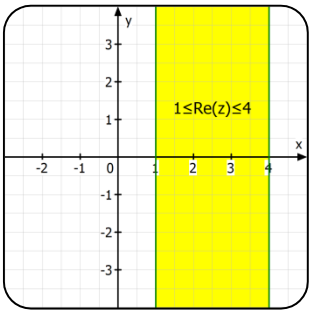
(2) Die Ungleichung $\operatorname{Re}(z) < 2$ beschreibt eine **Halbebene**, die von der Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung x = 2 nach rechts begrenzt wird. Man kann die Punktmenge auch durch $x < 2$ beschreiben. Die Punkte auf dieser Geraden gehören nicht mehr dazu.

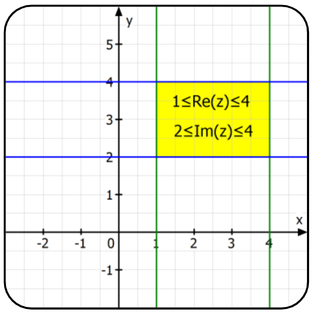
(3) Die Ungleichung $a \leq \operatorname{Im}(z) \leq b$ beschreibt einen **Streifen**, der parallel zur x-Achse ist.

(4) Die Ungleichung $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$ beschreibt einen **Streifen**, der parallel zur x-Achse ist.

(5) Nimmt man beide Ungleichungen zusammen, erhält man ein **Rechteck** (als Schnittmenge).







(4) Gesucht ist $M_1 = \left\{ z \mid \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0 \right\}$

Ausgehend von $z = x + iy$ folgt $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot i$

Und damit $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Die Ungleichung $\operatorname{Re}\frac{1}{z} > 0 \iff \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 0 \iff x > 0$

M_1 stellt somit die **Halbebene** dar, die rechts von der imaginären Achse liegt.

(5) Gesucht ist die Teilmenge $M_2 = \left\{ z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) < 0 \right\}$

Ausgehend von $z = x + iy$ folgt $\frac{2}{z} = \frac{2\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{2\bar{z}}{|z|^2} = 2\frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot i$

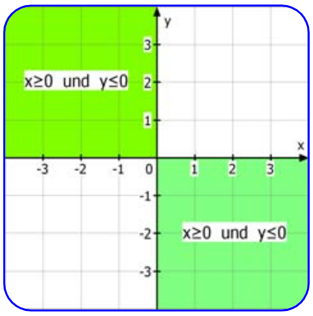
Und damit $\operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = -\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} < 0 \iff -2y < 0 \iff y > 0$.

M_2 stellt somit die **Halbebene** dar, die oberhalb der reellen Achse liegt.

(6) $\operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right) \geq 0$ Es sei $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$.

Dann ist $\operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right) = \operatorname{Im}\left((x-iy)^2\right) = \operatorname{Im}\left(x^2 - 2ixy + i^2y^2\right) = \operatorname{Im}\left(x^2 - 2ixy - y^2\right) = -2xy$

Also ist $\operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow -2xy \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{xy \leq 0}$



1. Lösung: $x \geq 0$ und $y \leq 0$ d.h.

Alle Punkte im 4. Quadranten einschließlich Rand.

2- Lösung: $x \leq 0$ und $y \geq 0$ d.h.

Alle Punkte im 2. Quadranten einschließlich Rand.

(7) a) $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 3$

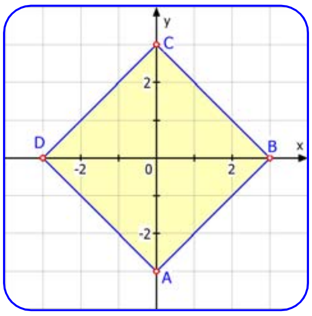
Es sei $z = x + i \cdot y$, dann lautet die Ungleichung $|x| + |y| = 3$

Weil $|x \geq| 0$ und $|y| \geq 0$ sind, muss $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ sein, dasselbe gilt für y.

Aus $|y| = -|x| + 3$ leitet man folgendes her:

1. Fall: Wenn $x \geq 0$ ist, dann folgt $|y| = -x + 3 \Rightarrow y = \begin{cases} -x+3 \\ x-3 \end{cases}$

2. Fall: Wenn $x < 0$ ist, dann folgt $|y| = x + 3 \Rightarrow y = \begin{cases} x+3 \\ -x-3 \end{cases}$



Die Lösungsmenge ist die Quadratlinie

$A(0 \mid -3), B(3 \mid 0), C(0 \mid 3), D(-3 \mid 0)$

b) $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 3$ bedeutet $|x| + |y| \leq 3$.

Der Unterschied zu Teilaufgabe a) liegt nur darin, dass auch alle inneren Quadratpunkte zur Lösungsmenge gehören: Sie ist ein „gefülltes Quadrat“.

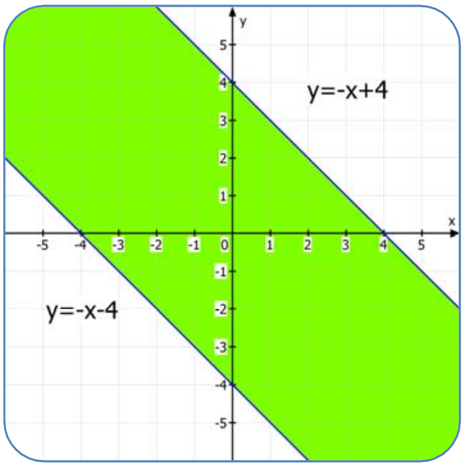
(8) $|\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)| \leq 4$

Schreibt man $z = x + iy$, dann lautet diese Ungleichung $|x + y| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x + y \leq 4$.

d. h. $-4 - x \leq y \leq 4 - x$

Gesucht ist also die Fläche zwischen

$y = -x - 4$ und $y = -x + 4$



3 Spezielle Punktmengen

(1) Welche komplexen Zahlen lösen die Gleichung $\operatorname{Im}(3z+2\bar{z})=1$?

Es sei $z=x+iy$, dann folgt: $3z+2\bar{z}=3x+3iy+2x-2iy=5x+iy$

und es ist $\operatorname{Im}(3z+2\bar{z})=y$

Lösungen sind alle komplexen Zahlen mit $y = 1$.

Das ist geometrisch gesehen eine Parallele zur reellen Achse (x-Achse).

(2) Welche Menge M ist gegeben durch $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z\bar{z}+4\cdot\operatorname{Re}(z)=16\}$ mit $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)$?

Es sei $z=x+iy$, dann folgt: $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$

Damit wird die Gleichung $z\bar{z}+4\cdot\operatorname{Re}(z)=16$ zu $x^2+y^2+4x=16$ (*)

Quadratische Ergänzung: $\left(x^2+4x+\boxed{4}\right)+y^2=16+\boxed{4} \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=20$

Diese Gleichung stellt einen **Kreis** um $M(-2\mid 0)$ mit Radius $\sqrt{20}$ dar.

Die Zusatzbedingung lautet $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow x=y$.

Ersetzt man damit y in (*), folgt: $2x^2+4x-16=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}2\\-4\end{cases}$$

Wegen $y=x$ erhält man diese Lösungen: $\mathbb{M}=\{2+2i\,;\,-4-4i\}$

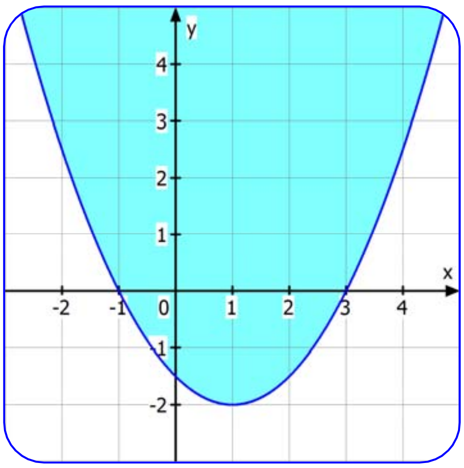
Das sind die Schnittpunkte des Kreises mit der 1. Winkelhalbierenden.

(3) $(\operatorname{Im}(z+i))^2 \geq |z-1|^2-3$ Es sei $z=x+iy$, Dann erhält man

L.S.: $[\operatorname{Im}(z+i)]^2=\left[\operatorname{Im}(x+i(y+1))\right]^2=(y+1)^2$

R.S.: $|z-1|^2-3=|x+iy-1|^2-3=(x-1)^2+y^2-3$

Zusammengesetzt:
$$(y+1)^2\geq(x-1)^2+y^2-3$$
$$y^2+2y+1\geq(x-1)^2+y^2-3$$
$$2y+1\geq(x-1)^2-3$$
$$2y\geq(x-1)^2-4$$
$$y\geq\tfrac{1}{2}(x-1)^2-2$$



$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$ ist die Scheitelform einer Parabel mit dem Scheitel $S(1\mid -2)$. Die Lösungsmenge ist daher die Punktmenge auf und oberhalb dieser Parabel.

(4) $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} < \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2\bar{z}}\right)$

usw.